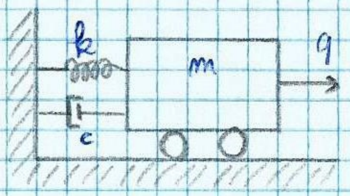
Integrazione numerica standard per sistema a un grado di libertà

Problema differenziale per le vibrazioni libere smorzate:



$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + 2\xi\omega_0\,\dot{q}(t) + k\,q(t) = 0 \\ q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

L'integrazione numerica standard conduce allo spazio di stato in cui è definito il vettore nelle variabili di stato $z(t)$:

$$z(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$$

Detta A la matrice dinamica del sistema il problema diviene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A \cdot z(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad \text{ovvero:} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Usando il programma Matlab la risoluzione di un problema differenziale si attua mediante il comando odexx (xx sta per il numero che indica il tipo di ode):

```
odexx (@nomefunz, [t0, tfin], [q0, q0p], options, a, b);
```

Tra parentesi compare "options" che contiene alcune informazioni (tra cui l'errore assoluto con cui si vuole che vengano forniti i risultati). Tali informazioni aggiuntive possono altresì non essere presenti: in questo caso si avrà options = [ ];. Ecco un esempio particolare di utilizzo di odexx:

```
options = odeset ['RelTol', 1e-5];
[T, z] = ode45 (@funz_1gdl, [0 10], [0.1 0], options, w0, ξ);
```

ω_0 e ξ sono i parametri inerenti al problema analizzato: in generale ne possono essere presenti molti altri.

Rappresentando con Matlab le soluzioni relative a sistemi a un grado di libertà si può osservare l'effetto del valore dello smorzamento ξ. Per $\xi \geq 1$ compare decadimento non oscillatorio (nel caso critico, per $\xi = 1$, si ha il decadimento più rapido). Si ricorda infatti che nella soluzione non è presente la parte immaginaria

$(e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} \cdot e^{i(\mathrm{Im}\,\lambda)t})$. Quando $\xi > 1$ si dice che il sistema è sovra-smorzato. Per $0 < \xi < 1$ il decadimento è oscillatorio e il sistema è detto sottosmorzato.